



ОБ ЭВРИСТИЧЕСКОЙ РОЛИ КРИЗИСОВ В РАЗВИТИИ МАТЕМАТИКИ

Е. И. Арепьев, И. А. Побережный

Курский государственный университет, Курск, Россия

Описываются три кризиса оснований математики, их влияние на её последующее развитие. На примере возникающих в математическом знании аномалий и подходов к их преодолению выявляется эвристическая значимость аномальных периодов науки в целом. В работе также освещается методологический вклад программ оснований математики рубежа XIX–XX вв.

Ключевые слова: *кризис оснований математики, математические объекты и истины, сущностные составляющие математики.*

Т. Кун в своей работе «Структура научных революций» рассматривает кризис в науке как явление, порождающее скачок, предпосылки появления новой научной теории [5]. В истории математики имели место несколько ситуаций глубокого кризиса её оснований, из которых выделяют три основных. Первым кризисом считают открытие несоизмеримости отрезков в школе пифагорейцев (VI–V вв. до н. э.). Второй кризис XVII–XVIII вв. был связан с проблемой введения бесконечно малых величин. Третий кризис имел место на рубеже XIX–XX вв. и был обусловлен парадоксами в теории множеств. А. Н. Колмогоров указывает, что первый из них привёл к формированию элементарной математики, второй — к формированию высшей математики, третий — к возникновению современной математики [6]. Анализируя эти кризисы, И. Н. Бурова пишет: «Общей причиной всех кризисов является, на наш взгляд, то, что математики не могли справиться с философскими и логическими проблемами, возникающими каждый раз в связи с открытием нового аспекта, нового содержания в понятии бесконечности» [3. С. 3].

Известно, что математика изучает нематериальные объекты или отношения — числа, мно-

жества, линии и тому подобное. Существует ряд ключевых вопросов, связанных с особенностями математического знания. Что позволяет математикам быть уверенными в истинности математических теорий? Почему математика утверждает именно то, что она утверждает, и почему она подходит для описания физической вселенной? Следует признать, что, например, только некоторые системы геометрии описывают Вселенную, которую мы наблюдаем. При этом другие геометрии не являются ложными просто потому, что они не описывают ничего физически реального, или, вернее говоря, мы пока не обнаружили областей материальной действительности, которые они описывают. Система математических отношений считается действительной или истинной, если она согласуется сама с собой, то есть если она работает на своих собственных условиях: она не обязательно должна соответствовать чему-то в изученном нами мире. В математике правильность оценивается по чисто математическим стандартам, а не по экспериментальным стандартам физической науки.

Исторически первой основой математики был здравый смысл, арифметические и геометриче-

ские очевидности, неизменно подтверждающиеся в опыте. Поэтому самыми ранними формами математики были счёт, или натуральные числа (1, 2, 3...), и связанные с ними операции (сложение, вычитание и т. д.), и евклидова геометрия, по настоящее время широко используемая в повседневной жизни, технике и большинстве наук, так как она обеспечивает максимальное приближение к геометрии физического мира.

Однако по мере того, как в последние столетия математика становится всё более абстрактной и сложной, математики и философы начинают подвергать сомнению саму природу математики. Как можно узнать, что данная математическая система утверждений является истинной, что бы ни означали её термины? Попытки ответить на этот вопрос, обнаружить метатеоретическую основу для объяснения и понимания математических истин породили область исследований, называемую «основания математики» и изучающую природу математики, её методы, использование различных теоретических инструментов, в самой математике и других областях знания [4].

Вопросы, с которых начинается исследование основ математики, обращены к природе исходных идей и истин, порождающих другие идеи и утверждения. Что такое математические объекты — числа, переменные, матрицы, уравнения? Как мы получаем знания о них и на каком основании мы верим, что это истинное знание? Что такое доказательство? Как установить, что математическое утверждение доказуемо? Теория, которая даёт ответы на такие вопросы, т. е. метатеория, должна быть способна объяснить большую часть, а предпочтительно всю математику, отталкиваясь от малого числа базовых допущений и принципов.

Цель оснований математики состоит в построении всех разделов этой науки таким образом, чтобы в её фундаменте лежали исходные простые понятия, допущения и принципы, а все остальные положения выводились из них. Здесь опять возникает вопрос, почему одни фундаментальные понятия принимаются раньше других? Инструменты метаматематики — это в значительной мере инструменты математической логики, которая одновременно выступает самостоятельным разделом этой науки.

Проблема надёжного обоснования математики особенно остро встала в начале XX в. в связи с обнаружением ряда противоречий в канторовской теории множеств [3. С. 26]. Этот переворот

в математическом мышлении известен сегодня как фундаментальный кризис оснований математики. Кризис, «...представляя собой яркое событие для математиков, достиг также и нематематической среды» [10]. Но математика за свою долгую историю знала и другие фундаментальные кризисы, связанные с новыми открытиями или изобретениями, которые ставили под сомнение то, что раньше считалось незыблемой основой математического мышления.

Открытие иррациональных чисел древнегреческими математиками, по всей видимости, вызвало первый фундаментальный кризис. Около 500 г. до н. э. Гиппас из Метапонта, ученик Пифагора, представил геометрическое доказательство того, что квадратный корень из двух является иррациональным числом — то есть числом, которое не может быть выражено как отношение двух целых чисел (как конечная или периодическая десятичная дробь). Есть версия, что Пифагор открыл этот факт раньше, но держал его в секрете, однако многие подобные истории обладают сомнительной достоверностью. Пифагор верил, что все вещи суть числа, то есть числа являются основой всей реальности, и существование числа, которое не может быть выражено как отношение двух целых чисел, в значительной мере обеспокоило его. Когда Гиппас раскрыл это тайное знание пифагорейцев «недостойным», его братья, согласно легенде, изгнали его из пифагорейского союза, и вскоре Гиппас погиб в море как наказанный божеством [9. С. 56–57].

Другой кризис в математике произошёл около 1850 г. и касался открытия неевклидовых геометрий [6]. Как известно, в своей книге «Начала» греческий математик Евклид (около 325–265 гг. до н. э.) разработал основы геометрии, предложив аксиоматическую систему, представлявшую собой ограниченное число основных допущений (аксиом), из которых выводились все другие истинные геометрические положения. Его система основывалась на пяти аксиомах — положениях, считавшихся самоочевидными, которые, по его мнению, нельзя было вывести из более простых. Одна из аксиом, пятая, казалась не столь самоочевидной, как остальные. Это постулат о параллельности, который гласит, что если прямая пересекает две другие прямые, образуя два внутренних угла (углы, обращённые друг к другу) на одной стороне, сумма которых меньше двух прямых углов, то две линии, если они бесконечно растянуты, должны пересечься на этой

стороне (в современной трактовке — через точку вне данной прямой на плоскости можно провести единственную прямую, параллельную данной). В евклидовой геометрии предполагается, что на другой стороне две прямые будут расходиться, то есть удаляться всё дальше и дальше друг от друга и никогда не пересекутся. Или, если сумма углов в точности равна 180° , то линии параллельны и никогда не пересекаются по обе стороны. В пятом постулате привлекается понятие бесконечности. Он утверждает возможность пересечения, которое может произойти на бесконечном расстоянии и поэтому не может наблюдаться во всех случаях. По этой причине пятый постулат никогда не считался, даже самим Евклидом, столь же самоочевидным, как и другие.

Из этих соображений возникает знаменитая проблема зависимости пятого постулата, то есть предположение, что пятый постулат Евклида — это не аксиома, а теорема, которая может быть доказана на основе других четырёх аксиом, признанных самоочевидными [13]. История математики знает множество попыток доказать, что пятый постулат является теоремой, но все они потерпели неудачу. Наконец, в XIX в. было доказано, что не только пять исходных аксиом образуют логически непротиворечивую систему — евклидову геометрию, но и первые четыре аксиомы плюс утверждение, которое противоречит пятому постулату, могут образовать логически непротиворечивую систему — неевклидову геометрию. Таким образом выяснилось, что пятый постулат независим от предыдущих четырёх постулатов.

Над созданием новой системы работали и немецкий математик Карл Гаусс, и венгр Янош Бойяи, но первопроходцем стал Николай Иванович Лобачевский, который в 1826 г. представил доклад «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», в котором были изложены начала новой геометрии.

Открытие возможности неевклидовой геометрии, не соответствующей нашему восприятию пространства, уменьшило доверие математиков к интуиции — чувству правильности или очевидности, как фундаменту математического знания и тем самым способствовало изучению математики с использованием формальной логики [8]. Именно логика показала, что геометрия, отличная от евклидовой (которую учёные и математики считали описывающей реальное простран-

ство), возможна. В результате больше внимания стало уделяться изучению свойств различных аксиоматических систем, что породило множество новых геометрий [7. С. 262].

До этого времени евклидовой геометрии придавался особый статус среди математических дисциплин, поскольку считалось, что она непосредственно обоснована интуицией, пространственным опытом. По этой причине понятия в математическом анализе получали геометрическую интерпретацию. Но в XIX в. работы многих математиков, в том числе немецкого учёного Карла Вейерштрасса (1815–1897 гг.), показали, что такие понятия, как предел, интеграл и производная, можно интерпретировать в терминах утверждений о действительных числах, а не геометрически. Поскольку рациональные числа, как известно, представимы в виде пар натуральных чисел, оставалась задача объяснить, что такое натуральные числа. Для некоторых этот вопрос был просто неразрешим: натуральные числа были фундаментальными, не поддающимися дальнейшей редукции. Таково было мнение, например, Леопольда Кронекера (1823–1891 гг.), который утверждал, что «Бог создал целые числа; всё остальное — дело рук человека». Некоторые другие учёные, такие как немецкий математик Рихард Дедекин (1831–1916 гг.) и немецкий математик и философ Готтлоб Фреге (1848–1925 гг.), пытались найти возможность дальнейшей редукции с помощью логики.

Логика была частью философии с момента её разработки Аристотелем (384–322 гг. до н. э.) вплоть до XIX в., когда, благодаря разработке неевклидовых геометрий, открылись огромные возможности логического мышления. В 1901 г. британский философ Бертран Рассел (1872–1970 гг.) обнаружил противоречие в логической системе Готтлоба Фреге, который пытался показать, что вся математика может быть сведена к логике.

В работе «Основоположения арифметики» в основе определения числа у Фреге лежит понятие взаимно однозначного соответствия. В § 72 указанной работы он пишет: «(1) Выражение “понятие F равночисленно с понятием G” означает то же самое, что и “существует отношение f, которое устанавливает взаимно-однозначное соответствие между объектами, подпадающими под понятие F, с одной стороны, и объектами, подпадающими под понятие G, с другой стороны”. (2) Число, которое принадлежит к понятию F, яв-

ляется объёмом понятия “равночисленно с понятием F”. (3) “N есть число” означает то же самое, что и “существует понятие такое, что N есть присущее этому понятию число”» [6. С 48]. Натуральное число у Фреге — «свойство понятия», то есть некоторый предикат от предиката. Однако в 1905 г. Бертраном Расселом была обнаружена противоречивость системы Фреге, в частности, противоречивость допустимого в ней понятия множества всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента.

Парадокс Рассела показал, что не существует множества, соответствующего каждому лингвистически определённом понятию. Второй том «Основных законов арифметики» уже был в печати, и Фреге мог только добавить приложение со своим комментарием. Но этот недостаток подрывал его усилия полностью обосновать математику на базе чистой логики [14].

Несмотря на то, что Фреге не удалось создать логическую базу для математики, его математическая логика стала стандартным инструментом фундаментальных исследований, и её изобретение сегодня признано одним из главных достижений западной мысли, как по причине возможности её применения к основам математики, так и потому, что она предопределила ряд событий, которые привели к изобретению современных компьютеров.

Развитие логики, осуществлённое Г. Фреге, оказало большое влияние не только на основания математики, но и на математику и философию в целом. В 1879 г. Фреге опубликовал работу под названием «Исчисление понятий» (*Begriffsschrift*). Эта работа, в которой учёный стремился описать то, что, по его мнению, являлось «необходимыми законами мышления», обычно рассматривается как рождение современной математической логики [2. С. 96]. У Фреге логика играла ту же роль, что микроскоп для научного исследования, — это был более утончённый, более точный способ видения. При изучении фундаментальных свойств математики нельзя пользоваться естественным языком, он слишком неточен. Поэтому Фреге изобрёл искусственный язык, новую идеографию (систему знаков, обозначающих идеи), с целью строгого описания логических понятий. Он надеялся избежать недостатков естественных языков, таких как неопределённость и двусмысленность. Эти характеристики естественного языка были помехой, если кто-то хотел выразить и изучить связи между формулами в математическом виде.

В 1884 г. Фреге опубликовал «Основоположения арифметики» с целью показать, что арифметика (считавшаяся им в то время наиболее фундаментальной частью математики) основана только на логике, что арифметические истины не нуждаются в поддержке со стороны эмпирических фактов и что математическая интуиция не нуждается в эмпирическом подтверждении. Его тезис о том, что арифметику можно свести к логике, стал предпосылкой одной из программ обоснования математики — логицизма. В этом тезисе утверждалось, что все вещи, о которых говорит арифметика натуральных чисел, можно рассматривать как чисто логические сущности. В своей попытке продемонстрировать то, что математику можно рассматривать как раздел логики, Фреге использовал понятие класса как объёма понятия, которое по сути соответствует понятию множества. Понятие класса рассматривалось Фреге как логическое, а не математическое понятие. Используя классы, он смог дать определение самого фундаментального понятия арифметики — числа. Для Фреге числа были (или могли быть) сведены к классам: например, число два — это класс всех классов, имеющих два элемента; число три — это класс всех классов, имеющих только три элемента, и т. д.

В своей работе «Основные законы арифметики» (*Grundgesetze der Arithmetik*), опубликованной в двух томах в 1893 и 1903 гг., Фреге, наконец, представил свою реконструкцию арифметики, основанную только на логике, изложив строгим образом логические законы и правила, из которых можно было шаг за шагом и без обращения к каким-либо дополнительным предположениям продемонстрировать арифметические истины.

Логическая программа Фреге в случае успеха доказала бы, что достоверность математического знания не вытекает из чувственной интуиции или эмпирических фактов. Этот тезис противоречил мнению многих математиков и философов того времени, которые, под влиянием идей И. Канта считали, что математика зиждется на интуиции пространства (в случае геометрии) и времени (в случае арифметики).

В своей логической системе Фреге использовал понятие «класс» в том же смысле, в каком в «наивной» теории множеств используется понятие «множество» (совокупность вещей). Именно способ использования этого понятия привёл к обнаружению парадокса в построениях Фреге. Парадокс Рассела выявил изъян в определении

класса, множества того времени. Это понятие широко использовалось и другими математиками, главным образом благодаря трудам немецкого учёного Г. Кантора. Кантор, помимо использования множеств для решения математических задач, положил начало изучению теоретико-множественных понятий, создав то, что получило название теории множеств [10].

Теоретико-множественный понятийный аппарат Кантора оказался мощным инструментом, позволившим многие математические задачи интерпретировать как задачи, связанные с множествами. Однако открытие парадокса Рассела оказало влияние на теорию Кантора. Программы Кантора и Фреге основывались на возможности связывания лингвистических выражений с множествами, в то время как парадокс Рассела показывал, что понятие множества, используемое этими теориями, в некоторых случаях противоречит самому себе. Рассел показал, что, например, не существует множества, соответствующего понятию «множество всех множеств» или понятию «множество всех множеств, обладающих свойством не быть элементами самих себя». «Пусть w предикат: “быть предикатом, который не приложим к самому себе”. Может ли w быть приложим к самому себе? Из любого ответа следует обратное. Следовательно, мы должны заключить, что w — не предикат. Аналогично не существует класса (как целого) тех классов, которые, взятые как целое, не принадлежат себе. Отсюда я заключаю, что иногда определённое множество не формирует целостного образования» [2. С. 76].

Рассел не был первым, кто обнаружил парадоксальность понятия множества. Кантор осознавал этот факт ещё до открытия Рассела. Однако «парадокс Рассела» оказался самой простой и удачной формулировкой из всех до тех пор сформулированных парадоксов. Извлечённый урок состоял в том, что понятие множества должно регулироваться аксиомами, которые утверждают, что множества существуют или могут быть построены, начиная с ранее заданных множеств. В 1908 г. немецкий математик Э. Цермело впервые создал аксиоматическую систему для теории множеств Кантора [10]. Позже математики расширили систему Цермело, были построены другие версии аксиоматизации теории множеств. Немецкий математик А. Френкель, венгерский математик Джон фон Нейман, швейцарский математик П. Бернайс и австрийский математик и логик

К. Гёдель — все они внесли большой вклад в развитие аксиоматической теории множеств.

Теория множеств Кантора сформировала новый подход к математике и новую философию бесконечного. Одна из самых значимых идей, которую Кантор ввёл в математику, заключается в том, что существуют различные порядки бесконечности: не все бесконечные множества эквивалентны по размеру. В 1874 г. Кантор опубликовал своё доказательство того, что существует столько же рациональных и алгебраических чисел, сколько и натуральных, но что множество действительных чисел строго больше по размеру, хотя все эти множества содержат бесконечное число членов [9]. Это был поразительный результат, поскольку все бесконечные множества ранее считались одинакового размера. Ещё более важным, чем сам результат, был способ, которым Кантор пришёл к своему заключению, показав, что невозможно перечислить все действительные числа.

Кронекер, являвшийся членом редколлегии журнала, где было опубликовано доказательство Кантора, скептически отнёсся к новым идеям, содержащимся в статье Кантора, и попытался предотвратить публикацию более поздней работы Кантора в журнале. Кронекер, как и многие математики его времени, принимал только те математические объекты, которые могли быть построены исходя из чисел, полагавшихся им интуитивно заданными, а именно, из натуральных чисел. Идеи Кантора были, по мнению Кронекера, бессмысленны, потому что они касались объектов, которые для него не существовали.

Развивая свою теорию порядков бесконечностей, некоторые из которых имеют большую мощность, чем другие, Кантор предположил, что множество действительных чисел (континуум) является наименьшим возможным множеством, которое строго больше, чем множество натуральных чисел. Эта гипотеза, как известно, была названа континуум-гипотезой [10]. Кантор стремился доказать правильность этой гипотезы, но все его попытки были безуспешны, и вопрос был оставлен на усмотрение будущих математиков. Несколько десятилетий спустя, используя методы математической логики, Гёдель доказал, что континуум-гипотеза согласуется с аксиомами современной ему математики. 1884 год стал для Кантора годом кризиса, который, возможно, был вызван его неспособностью доказать континуум-гипотезу. Кантор изменил своё отношение к науке, стал

больше интересоваться философией и стремился преподавать её вместо математики.

К началу XX в. математика и её основания существенно преобразились в результате разработки математической логики и теории множеств [11]. Логика, больше не рассматриваемая исключительно как часть философии, стала стандартным инструментом в математических исследованиях. Математика, благодаря введению теоретико-множественных понятий и методов, стала более абстрактной. Обнаруженные парадоксы не только не остановили прогресс математики, но и способствовали развитию современной логики. Язык и методы логики стали широко использоваться для придания математическим теориям точной и экономичной формы [14]. Построение разделов математики в виде формализованных аксиоматических структур имело много преимуществ: можно было сделать явными все допущения, связанные с математическими рассуждениями без обязательной привязки к интуитивной составляющей мышления. Таким образом, интуиция была как бы вытеснена из формальной математики в том смысле, что её нельзя было использовать для обоснования математических понятий или для доказательства истинности математических результатов.

Около 1900 г. итальянский математик Д. Пеано разработал систему из пяти аксиом, из которой можно вывести всю арифметику натуральных чисел:

- «1) 0 есть натуральное число;
- 2) следующее за натуральным числом есть натуральное число;
- 3) 0 не следует ни за каким натуральным числом;
- 4) всякое натуральное число следует только за одним натуральным числом;
- 5) аксиома полной индукции» [1. С. 48].

Согласно Б. Расселу, постулаты Пеано неявно определяют то, что мы подразумеваем под натуральным числом. Однако французский математик А. Пуанкаре утверждал, что аксиомы Пеано определяют натуральные числа только в том случае, если они непротиворечивы, то есть если внутри системы не может быть доказано самопротиворечивое утверждение вида « P и не- P ». Если такое доказательство существует, то аксиомы противоречивы и нельзя сказать, что они что-то определяют.

Д. Гильберт, ведущая личность в математике того периода, разработал свою программу оснований, в которой стремился доказать непрото-

речивость арифметики. В его знаменитом списке нерешённых математических проблем, выдвинутом на Международном конгрессе математиков в 1900 г. в Париже, проблема непротиворечивости арифметики занимала второе место.

Некоторые математики считали, что новые неинтуитивные методы лишены математического смысла. Но для большинства учёных, особенно для Гильберта, было абсурдным отказываться от мощных методов, ставших доступными благодаря теории множеств Кантора. Итак, в 1922 г. Гильберт разработал фундаментальную программу, желая, как он утверждал, решить вопрос об основаниях математики раз и навсегда. Подчёркивая важность использования формальных аксиоматических систем, он надеялся установить непротиворечивость формализованных математических теорий. Особенность его программы, которая стала известна как формализм, состояла в том, что она требовала, чтобы доказательство непротиворечивости производилось методами, включающими только финитные отношения между языковыми символами, используемыми для выражения математических утверждений [9]. Такое доказательство защитило бы результат от радикальной критики тех, кто, подобно голландскому математику Л. Брауэру, требовал для математики более конкретного, вычислительного смысла.

Австрийский математик Курт Гёдель доказал, что установка Гильберта неосуществима, по крайней мере в той форме, в какой Гильберт хотел её осуществить. В 1931 г. Гёдель доказал две теоремы, названные первой и второй теоремами неполноты, которые устанавливают строгий предел возможностей логики и формализации. Вторая теорема особенно повлияла на программу Гильберта, поскольку утверждала, что непротиворечивость системы арифметики не может быть доказана с помощью средств самой этой системы [12]. Этот результат имел важные последствия, поскольку показал, что программа Гильберта не может быть выполнена в её первоначальном виде.

Разработка проблем оснований математики продолжается и в настоящее время. Эти исследования пересекаются с математической логикой — теорией моделей и теорией доказательств — с аксиоматической теорией множеств и теорией вычислимости [10]. Они имеют также обширную составляющую онтологического и теоретико-познавательного характера.

В истории науки, особенно физики, мы встречаем примеры, когда учёные искали математические системы для описания устройства материального мира, например, в квантовой физике, теории относительности, и в результате обнаруживалось, что математики уже создали такие системы, до какого-либо рассмотрения перспектив их возможного использования в естествознании. Так, неевклидовы геометрии были разработаны задолго до того, как А. Эйнштейн в своей общей теории относительности предположил, что геометрия физического мира на самом деле неевклидова (хотя и приближается к Евклидовой на коротких расстояниях, малых скоростях и при сравнительно малой гравитации) [7].

Разработка оснований математики привела к прогрессу не только в самой математике, заставив математиков осмысливать, что именно они делают. Математические результаты рано или поздно, насколько позволяет об этом судить история науки, находят своё приложение, свою интерпретацию в физике или другой естественной на-

уке. Развитие теории множеств явилось важной предпосылкой создания ЭВМ. Механические калькуляторы могли быть построены и до развития теории множеств, но современная компьютерная техника опирается на разделы математики, связанные с теорией множеств, теорией чисел, теорией вычислимости и др.

Среди вопросов, разрабатывающихся в настоящее время, некоторые, например континуум-гипотеза, были сформулированы ещё при зарождении математической логики и теории множеств. Основания математики расширились и диверсифицировались, отчасти пересекаясь с формальной логикой и рядом математических областей. Кризис начала XX в. не привёл к явной победе какой-либо одной из спорных точек зрения — логицизма, платонизма, формализма, интуиционизма или языковой трактовки математики. Вместе с тем стало вполне очевидным, что все сущностные составляющие, выделяемые этими течениями, как определяющие природу математики, несомненно, характерны для этой науки.

Список литературы

1. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М. : Учпедгиз, 1938. 480 с.
2. Бирюков Б. В., Тростников В. Н. Жар холодных чисел и пафос бесстрастной логики. Формализация мышления от античных времён до эпохи кибернетики. М. : Знание, 1977. 192 с.
3. Бутова И. Н. Парадоксы теории множеств и диалектика. М. : Наука, 1976. 176 с.
4. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики : в 2 т. Т. 1 : Логические исчисления и формализация арифметики. М. : Наука, 1979. 558 с.
5. Кун Т. Структура научных революций. С вводной статьёй и дополнениями 1969 г. М. : Прогресс, 1977. 300 с.
6. Колмогоров А. Н. Математика в её историческом развитии / под ред. В. А. Успенского. М. : Наука, 1991. 224 с.
7. Рыбников К. А. История математики. М. : Изд-во Моск. ун-та, 1963. Т. 2. 336 с.
8. Фреге Г. Основоположения арифметики: логико-математические исследования о понятии числа / Готлоб Фреге ; [Вступ. ст. и пер. В. А. Суровцева]. Томск : Водолей, 2000. 127 с.
9. Чанышев А. Н. Итальянская философия. М. : Изд-во Моск. университета, 1975. 216 с.
10. Dauben, J. W. Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1979.
11. Ferreiros D. The Crisis in the Foundations of Mathematics // Princeton Companion to Mathematics. Princeton. Mass. Princeton University Press. 2008. P. 142–156.
12. Hatcher, W. S. Foundations of Mathematics. Philadelphia : W. B. Saunders Company, 1968.
13. Kunen K. The Foundations of Mathematics (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations). College Publications, 2009. 262 p.
14. Mancosu P. From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford: Oxford University Press, 1998.
15. Russell B. B. The Autobiography of Bertrand Russell. Crows Nest, New South Wales, Australia : Allen & Unwin, 1967.
16. Sarukkai, S. Revisiting the ‘Unreasonable Effectiveness’ of Mathematics. Current Science. 2005. № 88. P. 415–423.

Сведения об авторах

Арепьев Евгений Иванович — доктор философских наук, профессор, заведующий кафедрой философии Курского государственного университета. Курск, Россия.

Побережный Иван Александрович — аспирант кафедры философии Курского государственного университета. Курск, Россия. ivan.poberezhnyy@gmail.com

*Bulletin of Chelyabinsk State University. 2021. No. 5 (451).
Philosophy Sciences. Iss. 60. Pp. 118–125.*

ON THE PROBLEM OF CRISES IN THE DEVELOPMENT OF MATHEMATICS

E.I. Arepiev

Kursk State University, Kursk, Russia

I.A. Poberezhnyi

Kursk State University, Kursk, Russia. ivan.poberezhnyy@gmail.com

The article shows the process of formation of modern mathematics based on the analysis of the metatheoretical basis for the understanding and understanding of mathematical truths. Three main crises of the foundations of mathematics and their role in the development of mathematical science are described. The connection of the philosophy of mathematics with formal logic and a number of mathematical fields is considered.

Keywords: *crisis of the foundations of mathematics, mathematical objects, formal logic, essential components of mathematics.*

References

1. Arnol'd I.V. (1938) *Teoreticheskaya arifmetika* [Theoretical arithmetic]. Moscow. 480 p. [in Russ.]
2. Biryukov B.V., Trostnikov V.N. (1977) *Zhar holodnyh chisel i pafos bes-strastnoj logiki. Formalizaciya myshleniya ot antichnyh vremen do epohi kibernetiki* [The heat of cold numbers and the pathos of dispassionate logic. Formalization of thinking from ancient times to the era of cybernetics]. Moscow. 192 p. [in Russ.]
3. Burova I.N. (1976) *Paradoksy teorii mnozhestv i dialektika* [Paradoxes of set theory and dialectics]. Moscow. 176 p. [in Russ.]
4. Gil'bert D., Bernajs P. (1979) *Osnovaniya matematiki* [Grundlagen der Mathematik]. Moscow. 558 p. [in Russ.]
5. Kun T. (1977) *Struktura nauchnyh revolyucij* [The Structure of Scientific Revolutions]. Moscow. 300 p. [in Russ.]
6. Kolmogorov A.N. (1991) *Matematika v ee istoricheskom razvitii* [Mathematics in its historical development]. Moscow. 224 p. [in Russ.]
7. Rybnikov K.A. (1963) *Istoriya matematiki* [History of Mathematics]. Moscow. Moscow State University Press. Vol. 2. 336 p. [in Russ.]
8. Frege G. (2000) *Osnovopolozheniya arifmetiki* [Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl]. Tomsk. 127 p. [in Russ.]
9. Chanyshv A.N. (1975) *Italijskaya filosofiya* [Italian Philosophy]. Moscow. Moscow State University Pres. 216 p. [in Russ.]
10. Dauben, J.W. (1979) *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
11. Ferreiros D. (2008) *Mass. Princeton University Press*. 2008. P. 142–156.
12. Hatcher, W. S. (1968) *Foundations of Mathematics*. Philadelphia: W. B. Saunders Company.
13. Kunen, K. (2009) *The Foundations of Mathematics (Studies in Logic: Mathematical Logic and Foundations)*. College Publications. 262 p.
14. Mancosu, P. (1998) *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford: Oxford University Press.
15. Russell, B.B. *The Autobiography of Bertrand Russell*. Crows Nest, New South Wales, Australia: Allen & Unwin.
16. Sarukkai, S. (2005) *Current Science*, 88, p. 415–423.